

**KARTA KURSU**

## Studia stacjonarne I stopnia Fizyka

|                 |   |                                      |
|-----------------|---|--------------------------------------|
| Nazwa           | Analiza matematyczna w fizyce 2           |                                      |
| Nazwa w j. ang. | <i>Mathematical Analysis in Physics 2</i> |                                      |
| Koordynator     | Dr Renata Bujakiewicz-Korońska            | Zespół dydaktyczny                   |
|                 |   | Dr Dawid Naęcz<br>dr Kamila Komędera |
| Punktacja ECTS* | 6   |                                      |

## Opis kursu (cele kształcenia)

Uzyskanie wiadomości teoretycznych i umiejętności rachunkowych w zakresie rachunku różniczkowego i całkowego funkcji rzeczywistych wielu zmiennych wraz z elementami teorii pola wektorowego. Zapoznanie studentów z wybranymi strukturami współczesnej analizy matematycznej i wypracowanie umiejętności stosowania wprowadzonych pojęć i metod analizy matematycznej w praktyce.  
Przedmiot prowadzony w języku polskim.

## Warunki wstępne

|              |   |
|--------------|---|
| Wiedza       | Analiza matematyczna w zakresie funkcji jednej zmiennej |
| Umiejętności | Różniczkowanie i całkowanie funkcji jednej zmiennej     |
| Kursy        | Analiza matematyczna w fizyce I, Algebra                |

## Efekty uczenia się

|        | Efekt uczenia się dla kursu   | Odniesienie do efektów kierunkowych |
|--------|---|-------------------------------------|
| Wiedza | <p>W1 Student zna pojęcia funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej wielu zmiennych, funkcji złożonej, pojęcia granicy i ciągłości, pochodne cząstkowe, gradient funkcji oraz pochodną kierunkową. Student zna różniczki funkcji wielu zmiennych i funkcji złożonej oraz wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych. Student rozróżnia ekstrema lokalne, globalne, warunkowe i zna metody ich wyznaczania.</p> <p>W2 Student zna pojęcia całki Riemanna dla funkcji dwóch i trzech zmiennych oraz zna podstawowe twierdzenia związane z obliczaniem i zastosowaniami tych całek.</p> <p>W3 Student zna całki krzywoliniowe skierowane i całki krzywoliniowe nieskierowane, ich własności i zastosowania oraz najważniejsze twierdzenia z nimi związane.</p> <p>W4 Student zna całki powierzchniowe niezorientowane i całki powierzchniowe zorientowane, ich własności i zastosowania oraz najważniejsze twierdzenia z nimi związane.</p> <p>W5 Student zna elementarne pojęcia teorii pól wektorowych, wybrane operatory różniczkowe: gradient, rotacja, dywergencja, operator nabra; wie co to jest pole potencjalne i praca w polu potencjalnym. Student zna twierdzenie Stokesa w języku pola wektorowego i twierdzenia Gaussa o dywergencji w języku pola wektorowego. Student rozumie zagadnienia praktyczne opisane w literaturze w języku teorii pól wektorowych.</p> | W01,, W03, W04, W08, W10            |

|              | Efekt uczenia się dla kursu  | Odniesienie do efektów kierunkowych    |
|--------------|--|--|
| Umiejętności | <p>U1 Student potrafi obliczać granice i granice iterowane funkcji dwóch i trzech zmiennych, badać ciągłość funkcji. Ponadto student umie obliczać pochodne cząstkowe i pochodne kierunkowe. Student umie wyznaczać ekstrema lokalne, globalne, warunkowe.</p> <p>U2 Student umie obliczać podwójne i potrójne całki Riemanna oraz zna ich praktyczne zastosowania.</p> <p>U3 Student samodzielnie oblicza całki krzywoliniowe skierowane i całki krzywoliniowe nieskierowane, zna twierdzenie Greena i umie je stosować.</p> <p>U4 Student umie obliczać całki powierzchniowe niezorientowane i całki powierzchniowe zorientowane, zna i umie stosować twierdzenie Gaussa o dywergencji i twierdzenie Stokesa.</p> <p>U5 Student zna elementarne pojęcia teorii pól wektorowych, potrafi stosować wybrane operatory różniczkowe: gradient, rotacja, dywergencja, operator nabra; wie co to jest pole potencjalne i praca w polu potencjalnym, umie znajdować różne wielkości fizyczne wykorzystując odpowiednie operatory różniczkowe. Student zna twierdzenie Stokesa w języku pola wektorowego i twierdzenia Gaussa o dywergencji w języku pola wektorowego. Student rozumie zagadnienia praktyczne opisane w literaturze w języku teorii pól wektorowych. Student potrafi przygotować referat z tej dziedziny.</p> | U01, U02, U03, U06, U07, U08, U09, U10 |

|                       | Efekt uczenia się dla kursu   | Odniesienie do efektów kierunkowych |
|-----------------------|---|-------------------------------------|
| Kompetencje społeczne | <p>K1 Student zna ograniczenia własnej wiedzy i rozumie potrzebę dalszego kształcenia, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, także w językach obcych.</p> <p>K2 Student potrafi precyzyjnie formułować pytania, służące pogłębieniu własnego zrozumienia danego tematu lub odnalezieniu brakujących elementów rozumowania.</p> <p>K3 Student potrafi pracować zespołowo; rozumie konieczność systematycznej pracy nad wszelkimi projektami, które mają długofalowy charakter.</p> <p>K4 Student rozumie i docenia znaczenie uczciwości intelektualnej w działaniach własnych i innych osób; postępuje etycznie.</p> | K01, K02, K03, K04, K05, K06, K07   |

| Organizacja   |            |                     |  |   |  |   |  |   |  |   |
|---------------|------------|---------------------|--|---|--|---|--|---|--|---|
| Forma zajęć   | Wykład (W) | Ćwiczenia w grupach |  |   |  |   |  |   |  |   |
|               |            | A                   |  | K |  | L |  | S |  | P |
| Liczba godzin | 30         | 45                  |  |   |  |   |  |   |  |   |
|               |            |                     |  |   |  |   |  |   |  |   |

### Opis metod prowadzenia zajęć

Wykład z wykorzystaniem zarówno formy multimedialnej jak i tradycyjnej tablicy do wyjaśniania szczegółowych problemów i przykładów.  
W ćwiczeniach audytoryjnych preferowane są metody aktywizujące: metoda dyskusji dydaktycznej i metoda problemowa.

### Formy sprawdzania efektów kształcenia

|     | E – learning | Gry dydaktyczne | Ćwiczenia w szkole | Zajęcia terenowe | Praca laboratoryjna | Projekt indywidualny | Projekt grupowy | Udział w dyskusji | Referat | Praca pisemna (esej) | Egzamin ustny | Egzamin pisemny | Inne |
|-----|--------------|-----------------|--------------------|------------------|---------------------|----------------------|-----------------|-------------------|---------|----------------------|---------------|-----------------|------|
| W01 |              |                 |                    |                  |                     | x                    |                 | x                 |         |                      | x             | x               |      |
| W02 |              |                 |                    |                  |                     | x                    |                 | x                 |         |                      | x             | x               |      |
| W03 |              |                 |                    |                  |                     | x                    |                 | x                 |         |                      | x             | x               |      |
| W04 |              |                 |                    |                  |                     | x                    |                 | x                 | x       |                      | x             | x               |      |
| U01 |              |                 |                    |                  |                     |                      | x               | x                 |         |                      | x             | x               |      |
| U02 |              |                 |                    |                  |                     |                      | x               | x                 |         |                      | x             | x               |      |
| U03 |              |                 |                    |                  |                     |                      | x               | x                 |         |                      | x             | x               |      |
| U04 |              |                 |                    |                  |                     |                      | x               | x                 |         |                      | x             |                 |      |
| K01 |              |                 |                    |                  |                     | x                    |                 | x                 | x       |                      | x             |                 |      |
| K02 |              |                 |                    |                  |                     |                      | x               | x                 |         |                      | x             |                 |      |
| K03 |              |                 |                    |                  |                     |                      | x               | x                 | x       |                      | x             |                 |      |
| K04 |              |                 |                    |                  |                     | x                    | x               | x                 |         |                      | x             | x               |      |

|                |   |
|----------------|---|
| Kryteria oceny | <p><b>BARDZO DOBRY</b></p> <p>W1-U1 Student zna definicje i potrafi obliczać granice i granice iterowane funkcji dwóch zmiennych, badać ciągłość funkcji. Ponadto student umie obliczać pochodne cząstkowe i pochodne kierunkowe. Student umie wyznaczać ekstrema lokalne, globalne, warunkowe funkcji dwóch i trzech zmiennych. Student zna definicję i stosowne twierdzenia o funkcji uwikłanej i potrafi znajdować jej ekstrema.</p> <p>W2-U2 Student zna definicje i umie obliczać całki Riemanna podwójne i potrójne oraz zna ich praktyczne zastosowania.</p> <p>W3-U3 Student zna definicje i samodzielnie oblicza całki krzywoliniowe skierowane i całki krzywoliniowe nieskierowane, zna twierdzenie Greena i umie je stosować.</p> <p>W4-U4 Student zna definicje i umie obliczać całki powierzchniowe niezorientowane i całki powierzchniowe zorientowane, zna i umie stosować twierdzenie Gaussa o dywergencji i twierdzenie Stokesa.</p> <p>W5-U5 Student zna elementarne pojęcia teorii pól wektorowych, potrafi stosować wybrane operatory różniczkowe: gradient, rotacja, dywergencja, operator nabra; wie, co to jest pole potencjalne i praca w polu potencjalnym, umie znajdować różne wielkości fizyczne wykorzystując odpowiednie operatory różniczkowe. Student zna twierdzenie Stokesa w języku pola wektorowego i twierdzenie Gaussa o dywergencji w języku pola wektorowego. Student rozumie zagadnienia praktyczne opisane w literaturze w języku teorii pól wektorowych. Student potrafi przygotować referat z tej dziedziny. W oparciu o zdobytą wiedzę z rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych oraz potrafi samodzielnie rozwiązywać problemy fizyczne.</p> |
|                | <p><b>PLUS DOBRY</b></p> <p>W1-U1 Student zna definicje i potrafi obliczać granice i granice iterowane funkcji dwóch zmiennych, umie badać ciągłość funkcji. Ponadto student oblicza pochodne cząstkowe i pochodne kierunkowe. Student umie wyznaczać ekstrema lokalne, globalne, warunkowe funkcji dwóch zmiennych, zna definicję i stosowne twierdzenia o funkcji uwikłanej.</p> <p>W2-U2 Student zna definicje i umie obliczać podwójne i potrójne całki Riemanna oraz zna ich praktyczne zastosowania.</p> <p>W3-U3 Student zna definicje i samodzielnie oblicza całki krzywoliniowe skierowane i całki krzywoliniowe nieskierowane, zna twierdzenie Greena i umie je stosować</p> <p>W4-U4 Student zna definicje i umie obliczać całki powierzchniowe niezorientowane i całki powierzchniowe zorientowane, zna i umie stosować twierdzenie Gaussa o dywergencji i twierdzenie Stokesa</p> <p>W5-U5 Student zna elementarne pojęcia teorii pól wektorowych, potrafi stosować wybrane operatory różniczkowe: gradient, rotacja, dywergencja, operator nabra; wie, co to jest pole potencjalne i praca w polu potencjalnym, umie znajdować różne wielkości fizyczne wykorzystując odpowiednie operatory różniczkowe. Student zna twierdzenie Stokesa w języku pola wektorowego i twierdzenie Gaussa o dywergencji w języku pola wektorowego. Student rozumie zagadnienia praktyczne opisane w literaturze. Student potrafi przygotować referat z tej dziedziny. Korzystając z literatury fachowej student potrafi stosować zdobytą wiedzę z rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych do rozwiązywania problemów fizycznych.</p>   |
|                | <p><b>DOBRY</b></p> <p>W1-U1 Student zna definicje i potrafi obliczać granice funkcji dwóch zmiennych, umie badać ciągłość funkcji. Ponadto student oblicza pochodne cząstkowe i pochodne kierunkowe. Student umie wyznaczać ekstrema lokalne, globalne, warunkowe funkcji dwóch zmiennych.</p> <p>W2-U2 Student zna definicje i umie obliczać podwójne i potrójne całki Riemanna oraz</p>  |

zna ich praktyczne zastosowania.

W3-U3 Student samodzielnie oblicza całki krzywoliniowe skierowane i całki krzywoliniowe nieskierowane, zna twierdzenie Greena i umie je stosować.

W4-U4 Student umie obliczać całki powierzchniowe nieorientowane i całki powierzchniowe orientowane, zna i umie stosować twierdzenie Gaussa o dywergencji i twierdzenie Stokesa.

W5-U5 Student zna elementarne pojęcia teorii pól wektorowych, potrafi stosować wybrane operatory różniczkowe: gradient, rotacja, dywergencja, operator nabra; wie co to jest pole potencjalne i praca w polu potencjalnym, umie znajdować różne wielkości fizyczne wykorzystując odpowiednie operatory różniczkowe. Student zna twierdzenie Stokesa w języku pola wektorowego i twierdzenie Gaussa o dywergencji w języku pola wektorowego. Student rozumie zagadnienia praktyczne opisane w literaturze.

#### PLUS DOSTATECZNY

W1-U1 Student potrafi obliczać granice funkcji dwóch zmiennych, umie badać ciągłość funkcji. Ponadto student oblicza pochodne cząstkowe i pochodne kierunkowe. Student umie wyznaczać ekstrema lokalne i globalne funkcji dwóch zmiennych.

W2-U2 Student umie obliczać podwójne i potrójne całki Riemanna oraz zna ich praktyczne zastosowania.

W3-U3 Student samodzielnie oblicza całki krzywoliniowe skierowane i całki krzywoliniowe nieskierowane, zna twierdzenie Greena i umie je stosować.

W4-U4 Student umie obliczać całki powierzchniowe nieorientowane i całki powierzchniowe orientowane, zna i umie stosować twierdzenie Gaussa o dywergencji i twierdzenie Stokesa.

W5-U5 Student zna i potrafi stosować wybrane operatory różniczkowe: gradient, rotacja, dywergencja, operator nabra; wie, co to jest pole potencjalne i praca w polu potencjalnym, umie znajdować różne wielkości fizyczne wykorzystując odpowiednie operatory różniczkowe. Student zna twierdzenie Stokesa w języku pola wektorowego i twierdzenie Gaussa o dywergencji w języku pola wektorowego.

#### DOSTATECZNY

W1-U1 Student potrafi obliczać granice funkcji dwóch zmiennych, umie badać ciągłość funkcji. Ponadto student oblicza pochodne cząstkowe i pochodne kierunkowe. Student umie wyznaczać ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych.

W2-U2 Student umie obliczać podwójne i potrójne całki Riemanna.

W3-U3 Student samodzielnie oblicza całki krzywoliniowe skierowane i całki krzywoliniowe nieskierowane, zna twierdzenie Greena i umie je stosować.

W4-U4 Student umie obliczać całki powierzchniowe nieorientowane i całki powierzchniowe orientowane, zna i umie stosować twierdzenie Gaussa o dywergencji i twierdzenie Stokesa

W5-U5 Student zna i potrafi stosować wybrane operatory różniczkowe: gradient, rotacja, dywergencja, operator nabra. Student zna twierdzenie Stokesa w języku pola wektorowego i twierdzenie Gaussa o dywergencji w języku pola wektorowego.

|       |  |
|-------|--|
|       | <p>NIEDOSTATECZNY</p> <p>W1-U1 Student nie zna definicji i nie potrafi obliczać granic oraz granic iterowanych funkcji dwóch zmiennych, nie umie badać ciągłości funkcji. Ponadto student nie umie obliczać pochodnych cząstkowych i pochodnych kierunkowych. Student nie zna definicji i nie umie wyznaczać ekstremów lokalnych, globalnych a także warunkowych funkcji dwóch i trzech zmiennych. Student nie zna definicji i twierdzenia o funkcji uwikłanej.</p> <p>W2-U2 Student nie zna definicji i nie umie obliczać podwójnych i potrójnych całek Riemanna oraz nie zna ich praktycznych zastosowań.</p> <p>W3-U3 Student nie zna definicji i nie umie obliczać całki krzywoliniowej skierowanej i całki krzywoliniowej nieskierowanej, nie zna twierdzenia Greena.</p> <p>W4-U4 Student nie zna definicji i nie umie obliczać całki powierzchniowej niezorientowanej i całki powierzchniowej zorientowanej, nie zna twierdzenia Gaussa o dywergencji i twierdzenia Stokesa.</p> <p>W5-U5 Student nie zna elementarnych pojęć teorii pól wektorowych, nie zna i nie potrafi stosować operatorów różniczkowych takich jak: gradient, rotacja, dywergencja, operator <math>\text{grad}</math>; nie wie co to jest pole potencjalne i praca w polu potencjalnym. Student nie zna twierdzenia Stokesa w języku pola wektorowego i twierdzenia Gaussa o dywergencji w języku pola wektorowego. Student nie potrafi korzystać z literatury.</p> |
| Uwagi | <p>Ocena końcowa z ćwiczeń audytoryjnych jest średnią ocen z odpowiedzi ustnych, kolokwiów, dyskusji, udziału w projektach indywidualnych i zbiorowych.</p> <p>Ocena końcowa z przedmiotu jest średnią ocen z zaliczenia ćwiczeń audytoryjnych, egzaminu pisemnego i egzaminu ustnego.</p>   |

#### Treści merytoryczne (wykaz tematów)

|  |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Funkcje wielu zmiennych - granica i ciągłość, pochodne cząstkowe, gradient funkcji. Pochodna kierunkowa.</li> <li>2. Różniczkowanie odwzorowań z przestrzeni kartezjańskiej <math>n</math>-wymiarowej do przestrzeni kartezjańskiej <math>m</math>-wymiarowej. Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych i funkcji złożonej. Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych.</li> <li>3. Całki podwójne. Własności całek podwójnych. Twierdzenie Fubniego o iteracji. Obliczanie całek podwójnych w obszarach normalnych. Twierdzenie o zamianie zmiennych dla całek podwójnych. Zastosowania całek podwójnych.</li> <li>4. Całki potrójne. Własności całek potrójnych. Obliczanie całek potrójnych w obszarach normalnych. Twierdzenia o zamianie zmiennych dla całek potrójnych. Zastosowania całek potrójnych.</li> <li>5. Całki krzywoliniowe skierowane. Twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej skierowanej na całkę oznaczoną. Twierdzenie Greena. Niezależność całki krzywoliniowej skierowanej od drogi całkowania.</li> <li>6. Całka krzywoliniowa nieskierowana. Własności całki krzywoliniowej nieskierowanej i jej zastosowanie. Twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej nieskierowanej na całkę oznaczoną.</li> <li>7. Całki powierzchniowe niezorientowane. Własności całek powierzchniowych niezorientowanych. Obliczanie całek powierzchniowych niezorientowanych i ich zastosowanie.</li> <li>8. Całki powierzchniowe zorientowane. Własności całek powierzchniowych zorientowanych. Obliczanie całek powierzchniowych zorientowanych i ich zastosowanie. Twierdzenie Gaussa o dywergencji i twierdzenie Stokesa.</li> <li>9. Elementarne pojęcia teorii pól wektorowych. Wybrane operatory różniczkowe: gradient, rotacja, dywergencja, operator <math>\text{grad}</math>. Pole potencjalne. Praca w polu potencjalnym.</li> <li>10. Strumień rotacji wektora przez powierzchnię. Twierdzenie Stokesa w języku pola wektorowego. Strumień wektora przez powierzchnię. Twierdzenia Gaussa o dywergencji w języku pola wektorowego.</li> </ol> |
|--|

## Wykaz literatury podstawowej

J. Koroński, „Wykłady i ćwiczenia z matematyki”, cz.II, Wydawnictwo PK, Kraków  
W. Krysicki, „Analiza matematyczna w zadaniach”, cz.II, PWN, Warszawa  
R. Rudnicki, „Wykłady z analizy matematycznej”, PWN, Warszawa 2001

## Wykaz literatury uzupełniającej

M. Gewert, Z. Skoczylas, „Analiza matematyczna 2”, GIS, Wrocław  
F. Leja, „Rachunek różniczkowy i całkowy”, PWN, Warszawa 1979  
W. Stankiewicz, „Zadania z matematyki część AB dla wyższych uczelni technicznych”, PWN, Warszawa  
G. I. Zaporozec, „Metody rozwiązywania zadań z analizy matematycznej”, WNT, Warszawa 1967

## Bilans godzinowy zgodny z CNPS (Całkowity Nakład Pracy Studenta)

|   |  |     |
|---|--|-----|
| liczba godzin w kontakcie z prowadzącymi                              | Wykład   | 30  |
|   | Konwersatorium (ćwiczenia, laboratorium itd.)  | 45  |
|   | Pozostałe godziny kontaktu studenta z prowadzącym -<br>- bezpośrednie konsultacje                      | 5   |
| liczba godzin pracy studenta bez kontaktu z prowadzącymi              | Lektura w ramach przygotowania do zajęć  | 20  |
|   | Przygotowanie krótkiej pracy pisemnej lub referatu po zapoznaniu się z niezbędną literaturą przedmiotu | 10  |
|   | Przygotowanie projektu lub prezentacji na podany temat (praca w grupie)                                | 10  |
|   | Przygotowanie do egzaminu/zaliczenia   | 30  |
| Ogółem bilans czasu pracy   |  | 150 |
| Liczba punktów ECTS w zależności od przyjętego przelicznika 1ECTS=25h |  | 6   |